كلية الزهراوي / علوم الفيزياء الطبية / المحلة الأولى / رياضيات

==========

PREREQUISITES FOR CALCULUS (المتطلبات الاساسية للتفاضل والتكامل)

Sets and Intervals (المجموعات والفترات)

DEFINITIONS:

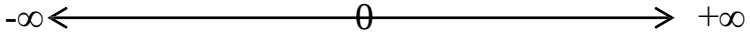
Set: is a collection of things under certain conditions.

Example 1:

$$A=\{1,3,5,8,10\};$$

A is a set, 1,3,5,8,10 are elements.

Real Numbers (R): is a set of all rational and irrational numbers. R= {-∞, +∞},



Integer Numbers (I): a set of all irrational numbers.

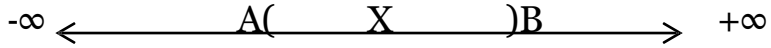
I = {-∞,----,-3,-2,-1,0,1,2,3, ---,+∞} negative and positive numbers only.

Natural Numbers (N): consist of zero and positive integer numbers only.

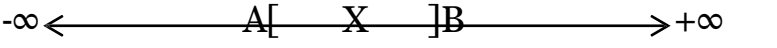
N ={0,1,2,3, ---,+∞}

Intervals: is a set of all real numbers between two points on the real number line. (it is a subset of real numbers)

1. **Open interval:** is a set of all real numbers between A&B excluded (A&B are not elements in the set). $\{x: A < x < B\}$ or (A, B).

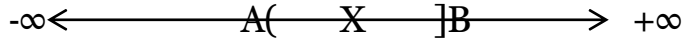
   

2. **Closed interval:** is a set of all real numbers between A&B included (A&B are elements in the set). {x: A ≤ x ≤ B} or [A, B].

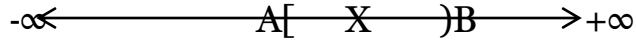
   

3. **Half-Open interval (Half-Close):** is a set of all real numbers between A & B with one of the end-points as an element in the set.

   a) (A, B]= {x: A < x ≤ B}

   b) [A, B)= {x: A ≤ x < B}

Lecture (1)

==========

TABLE 1.1 Types of intervals

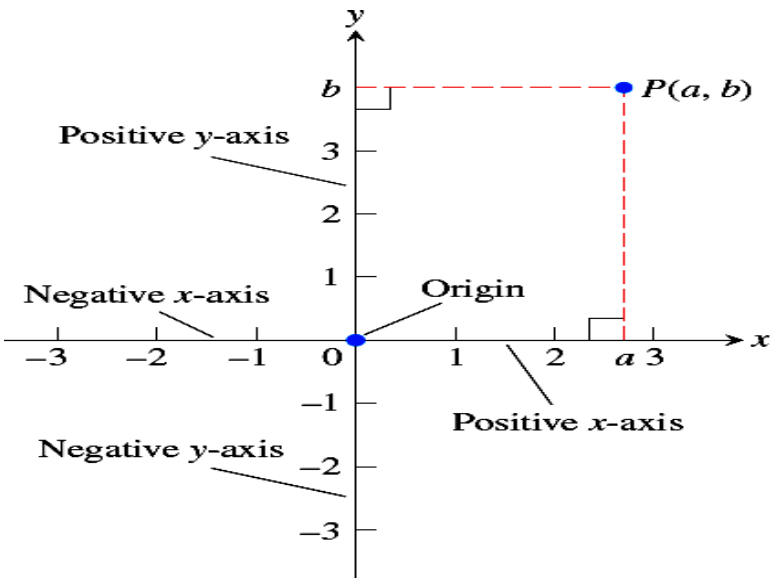
	Notation	Set description	Type	Picture
Finite:	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Open	
	$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	Closed	
	$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	Half-open	
	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	Half-open	
Infinite:	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Open	
	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \ge a\}$	Closed	
	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Open	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	Closed	
	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (set of all real numbers)	Both open and closed	

Lecture (1)

==========

Coordinate in the Plane (الاحداثيات في الفراغ او المستوى)

Each point in the plane can be represented with a pair of real numbers (a,b), the number a is the horizontal distance from the origin to point P, while b is the vertical distance from the origin to point P. The origin divides the x-axis into positive x axis to the right and the negative x-axis to the left, also, the origin divides the y-axis into positive y-axis upward and the negative x-axis downward. The axes divide the plane into four regions called quadrants.



Lecture (1)

==========

Distance between Points and (Mid-Point Formula):

Distance between points in the plane is calculated with a formula that comes from Pythagorean Theorem:

❖ Distance Formula for Points in the Plane

The distance between $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

and the mid-point formula:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Example 2: find the distance between **P(-1,2)** and **Q(3,4)** and find the mid-point:

Sol.:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , x_0 = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ and } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \ , y_0 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Example 3: find the distance between **R(2,-3)** and **S(6,1)** and find the mid-point:

Sol.:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

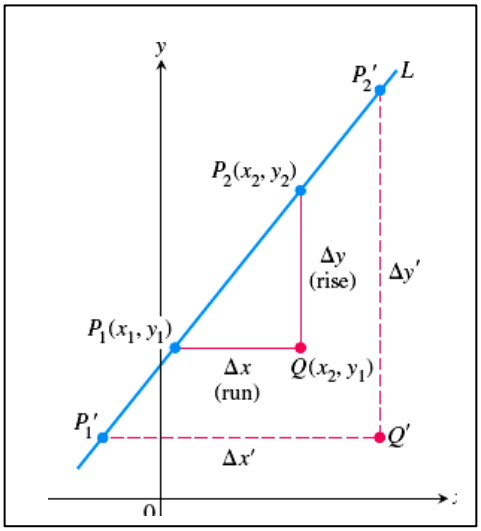
$$= \sqrt{(6 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , x_0 = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ and } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \ , y_0 = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Lecture (1)

==========

Slope and Equation of Line



- **Slope (الميل):** The constant

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

is the slope of non-vertical line $P_1 P_2$.

Note1: Horizontal line have (**m=0**) ($\Delta y=0$), and the vertical line has no slope or the slope of vertical line is undefined ($\Delta x=0$).

Note2: Parallel lines have the same slope
In the the lines are parallel then **(m1= m2).**

Note3: If two non-vertical lines L1and L2 are perpendicular, their slopes **m1** and **m2** satisfy
m1*m2 = -1,
so each slope is the negative reciprocal of the other.

$$m_1 = \frac{1}{m_2} \; and \; m_2 = \frac{1}{m_1}$$

Example 4: Find the slope of the straight line through the two points **P(3,2)** and **Q(4,4)** :
Sol.:

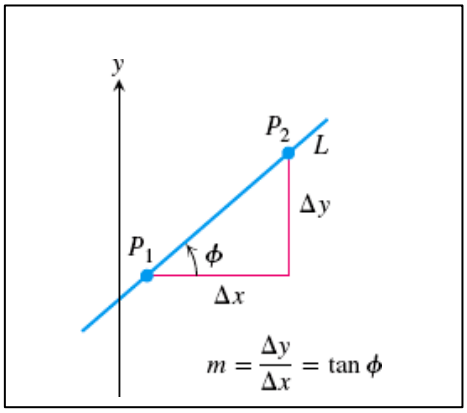
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{4-3} = 2.$$

==========

Lecture (1)

==========

❖ Point-Slope Equation:



We can write an equation for a non-vertical straight line L if we know its slope m and the coordinate of one point $P_1(x_1, y_1)$ on it. If $P(x, y)$is any other point on L, then we can use two points P_1 and P to compute the slope,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

so that $y - y_1 = m(x - x_1)$

or $y = y_1 + m(x - x_1)$

The equation $y = y_1 + m(x - x_1)$

is the point-slope equation of the line that passes through the point $P_1(x_1, y_1)$ **and has slope m.**

Example 5: write an equation for the line pass through the point **(2,3)** with slope **(-3/2).**

Sol.: we substitute $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, and m = -3/2 into the point-slope equation and obtain

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

$$y = 3 + \frac{-3}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

==========

Lecture (1)

==========

Example 6: A line pass through two points: write an equation for the line through
(-2,-1) and **(3,4)**
Sol.: The line's slope is

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-4}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

We can use this slope with either of the two given points in the point-slope equation;

With $(x_1,y_1) = (-2, -1)$	With $(x_2,y_2) = (3, 4)$
$y = -1 + 1 \cdot (x-(-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x-3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

Note: The equation:

$$y = mx + b$$

is called the **slope-intercept equation** of the line with slope m and y-intercept b

Note: **The general form of straight line equation** is

$$Ax + By + C = 0$$

Example 7: finding the slope and y-Intercept for the line 8x + 4y = 20.
Sol.: solve the equation for y to put it in slope-intercept form :

$$8x + 4y = 20$$
$$4y = -8x + 20$$
$$y = -8/4\ x + 4.$$
$$y = -2\ x + 4.$$

The slope **m = – 2** the y-intercept is **b = 4**.

Lecture (1)

==========

H.W:

1. finding the slope and y-Intercept for the line **4x + 2y = 4**.
2. write an equation for the line pass through **(-1,-1)** and **(1,2).**
3. write an equation for the line pass through the point **(1,-1)** with slope **(4).**
4. Find the **slope** of the straight line through the two points **P(3,-2)** and **Q(3,6)**.
5. write an equation for the horizontal line pass through the point **(2,-2)**

المجال	التفاصيل
تعريف التفاضل	فرع من علم حساب التفاضل والتكامل يُستخدم لدراسة معدلات التغير والاشتقاق، وإيجاد معدل التغير اللحظي لدالة ما، وهو ما يُعرف بالمشتقة.
أنواع التفاضل	1. **التفاضل العادي (Ordinary Differentiation)**: يُطبق على الدوال ذات المتغير الواحد مثل $f(x)$. 2. **التفاضل الجزئي (Partial Differentiation)**: يُستخدم عند التعامل مع دوال متعددة المتغيرات مثل $f(x, y)$. 3. **التفاضل الاتجاهي (Directional Differentiation)**: يُستخدم لحساب معدل التغير في اتجاه معين وليس فقط على المحاور. 4. **التفاضل الضمني (Implicit Differentiation)**: يُستخدم عندما تكون الدالة غير معرّفة صراحةً بدلالة متغير مستقل.
طرق التفاضل (الاشتقاق)	1. **الاشتقاق المباشر (Direct Differentiation)**: باستخدام القوانين الأساسية مثل $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$. 2. **قاعدة السلسلة (Chain Rule)**: لاشتقاق الدوال المركبة. 3. **قاعدة الضرب (Product Rule)**: لاشتقاق حاصل ضرب دالتين. 4. **قاعدة القسمة (Quotient Rule)**: لاشتقاق قسمة دالتين. 5. **التفاضل الضمني (Implicit Differentiation)**: يُستخدم عندما لا تكون الدالة مكتوبة بشكل صريح.
علاقة التفاضل بالتكامل	التفاضل والتكامل عمليتان متعاكستان وفقًا لنظرية أساسيات حساب التفاضل والتكامل: $\int f(x)dx = F(x) + C$
التفاضل في الأعداد المركبة	يمكن اشتقاق الدوال المركبة باستخدام قاعدة كوشي-ريمان.
الاشتقاق الهندسي والفيزيائي	1. **التفسير الهندسي**: تمثل المشتقة ميل المماس لمنحنى الدالة عند نقطة معينة. 2. **التفسير الفيزيائي**: تعبر المشتقة عن السرعة اللحظية لجسم متحرك عندما تمثل الدالة موضعه.
المبادئ الأساسية للتفاضل	1. **المشتقة (Derivative)**: معدل التغير اللحظي للدالة. 2. **المشتقة الثانية (Second Derivative)**: تحليل التقعر واختبار نقاط الانعطاف. 3. **الميل (Slope)**: يمثل معدل تغير الدالة عند نقطة معينة. 4. **القيم القصوى (Extrema)**: تُحدد القيم العظمى والصغرى للدوال. 5. **نقاط الانعطاف (Inflection Points)**: تحدد أماكن تغيير التقعر في الدالة. 6. **المشتقات العليا (Higher Order Derivatives)**: تعبر عن المشتقات المتكررة للدالة.

Week 1	Reviewing of Algebraic Concepts, Algebraic Expressions, Exponents and Logarithms.

الموضوع	**المصطلح بالإنجليزية**	**المبدأ**	**مثال**
المتغيرات والثوابت	Variables and Constants	المتغيرات هي رموز تمثل قيمًا غير معروفة، أما الثوابت فهي قيم ثابتة لا تتغير.	x المتغير هو، $3x + 5 = 11$ في المعادلة والثابت هو 5.
التعبيرات الجبرية	Algebraic Expressions	مزيج من الأعداد والمتغيرات والعمليات الحسابية دون وجود إشارة مساواة.	$2x + 3y - 5$
المعادلات	Equations	تعبير جبري يحتوي على علامة مساواة، يمكن حله لإيجاد قيمة المتغير.	$2x + 3 = 7$ الحل: $x = 2$
المتباينات	Inequalities	تشبه المعادلات لكنها تحتوي على رموز مثل $<$ أو $>$ بدلاً من $=$.	$3x - 5 > 10$ الحل: $x > 5$
القواعد الأسية	Exponent Rules	تشمل قواعد مثل: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ و $(a^m)^n = a^{m \times n}$.	$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
الأسس الصفرية والسالبة	Zero and Negative Exponents	أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، والأسس السالبة تعني مقلوب العدد المرفوع للأس.	$5^0 = 1$، $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ و
اللوغاريتمات	Logarithms	العملية العكسية للأسس، حيث إذا $a^x = b$، $\log_a(b) = x$.	$2^3 = 8$ لأن $\log_2(8) = 3$
خصائص اللوغاريتمات	Logarithmic Properties	تتضمن: $\log(ab) = \log a + \log b$، و$\log(a/b) = \log a - \log b$.	$\log(10 \times 100) = \log 10 + \log 100 = 1 + 2 = 3$
الدوال الأسية واللوغاريتمية	Exponential and Logarithmic Functions	الدوال الأسية تأخذ الشكل $f(x) = a^x$، واللوغاريتمية هي معكوسها $g(x) = \log_a x$.	$f(x) = 2^x$ و $g(x) = \log_2 x$
التحليل إلى العوامل	Factoring	تحويل التعبير الجبري إلى جداء عوامل أصغر، مثل $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.	$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$
المعادلات التربيعية	Quadratic Equations	معادلات من الدرجة الثانية تأخذ الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ وتُحل باستخدام التحليل أو القانون العام.	$x^2 - 4x - 5 = 0$ بالتحليل: $(x - 5)(x + 1) = 0$ الحل: $x = 5$ أو $x = -1$
القانون العام للمعادلات التربيعية	Quadratic Formula	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ لحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$.	$x^2 - 3x - 4 = 0$ باستخدام القانون العام لحل: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$ $x = \frac{3 \pm 5}{2}$ الحل: $x = 4$ أو $x = -1$

Lecture (2)

==========

Example 8: Find the line L1 passes through the point P(1,2) and parallel the line L2: x + 2y = 3.

SOL:

L1: P(1,2) M=???

L2: x + 2y = 3.

L1 parallel the line L2 so that m1=m2.

x + 2y = 3

y = -1/2 X + 3/2

then m2= -1/2 so that m1=-1/2

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

$$y = 2 + (-\frac{1}{2})(x - 1)$$

$$y = 2 + (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

==========

H.W:

Find the line L1 passes through the point (-2,2) and perpendicular to the line L2 : 2x + y = 4.

==========

Lecture (2)

==========

The Distance from a Point to a Line:

The distance (d) between the line L is Ax + By + C= 0 and the point $P(x_1, y_1)$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Example 9: Find the distance from the point P(2,1) to the line y = x + 2

SOL:

1- put the line in the general form Ax + By + C= 0

y = x + 2

-x+y-2=0

so that A=-1 ,B=1 , C=-2 , $x_1 = 2$, $y_1 = 1$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-1 * (2) + 1 * (1) + (-2)|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

==========

H.W:

1- Find the distance from the point P(3,2) to the line y = 3x – 4.

2- Find the distance from the point P(-4,1) to the line y = -2x +1.

3- Find the following:

- The slope of the line 2x+3y-5=0?
- The distance from the above line to the point P(-1,0).

==========

Lecture (2)

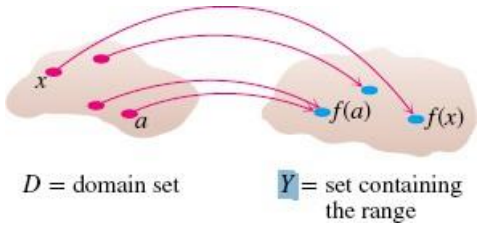
==========

Functions الدوال

DEFINITION: Function

A **function** is a set D (domain) to a set R (range) is a rule that assigns to unique (single) element f(x)∈R to each element x∈D.

$F: X \to F(X)$ it means that f sends x to f(x)=y



- **The set of x is called the "Domain" of the function (D_f).**
- **The set of y is called the "Range" of the function (Rf).**

Domain (Df): is the set of all possible inputs (x-values).
Range (Rf): is the set of all possible outputs (y-values).

Note: To find Domain (Df) and the Range (Rf) the following points must be noticed:

1- The denominator in a function must not equal zero (never divide by zero).
2- The values under even roots must be positive.

خطوات إيجاد المجال، المجال المقابل، والمدى لأي دالة

خطوات إيجاده	التعريف	المصطلح بالإنجليزية	المصطلح بالعربية
مثل القسمة على صفر) x البحث عن أي قيود على .1 (أو الجذور السالبة تحديد جميع القيم الممكنة التي يمكن إدخالها في .2. .الدالة	التي x مجموعة جميع القيم الممكنة لـ .يمكن إدخالها في الدالة	**Domain (Df)**	**المجال**
يتم تحديده نظريًا وفقًا لتعريف الدالة.2 .في بعض .1 الأحيان يتم اختياره ليشمل جميع الأعداد الحقيقية إذا لم .يكن هناك تحديد آخر	جميع القيم التي يمكن أن تكون مخرجات الدالة، لكنها قد لا تكون جميعها .مستخدمة فعليًا	**Codomain (Cf)**	**المجال المقابل**
إيجاد صورة المجال بعد التعويض في الدالة.2 . .1 معرفة القيم الفعلية التي يمكن أن تخرج من الدالة وليس .فقط المجال المقابل	القيم الفعلية التي تنتج عن تطبيق الدالة .على المجال	**Range (Rf)**	**المدى**

مثال تطبيقي على دالة الجيب $f(x) = \sin(x)$

التوضيح	القيمة في $\sin(x)$	المصطلح
.لأن دالة الجيب تُعرَّف لجميع الأعداد الحقيقية x يمكن إدخال أي قيمة لـ	$\mathbb{R}$ (كل الأعداد الحقيقية)	**المجال (Domain)**
نظريًا، يمكن أن يكون المجال المقابل جميع الأعداد الحقيقية، لكن القيم الناتجة عن $\sin(x)$ تظل بين -1 و 1 فقط.	$[-1,1]$	**المجال المقابل (Codomain)**
القيم الفعلية التي تنتج من الدالة تكون دائمًا بين -1 و 1، مما يجعل المدى مساويًا .للمجال المقابل	$[-1,1]$	**المدى (Range)**

1. **إيجاد المجال (Domain):**
   - تحديد جميع القيم الممكنة لـ x.
   - استبعاد القيم التي تسبب مشكلات مثل القسمة على صفر أو الجذر التربيعي لأعداد سالبة.
2. **إيجاد المجال المقابل (Codomain):**
   - يُحدَّد عادةً وفقًا لتعريف الدالة.
   - في بعض الأحيان، يكون هو مجموعة الأعداد الحقيقية إذا لم يكن هناك تحديد آخر.
3. **إيجاد المدى (Range):**
   - حساب القيم الفعلية الناتجة عن الدالة من خلال التعويض بقيم من المجال.
   - تحليل سلوك الدالة لمعرفة القيم التي يمكن أن تنتج عنها.

مثال إضافي :◆
لو كانت لدينا الدالة

$f(x) = \sqrt{x}$:

- **المجال (Domain)**
- $x \geq 0$ **:**
- لأن الجذر التربيعي غير معرّف للأعداد السالبة.
- **المجال المقابل (Codomain)**
- لكننا نعرف أن الدالة لا تُخرج سوى القيم غير السالبة ،$\mathbb{R}$ يمكن أن يكون جميع الأعداد الحقيقية **:**
- **المدى (Range):**
- لأنه لا يمكن أن تكون النتائج سالبة $[0, \infty)$.

Lecture (2)

==========

المصدر طبعة 11 صفحة 26 امثله راجعوها

Examples: Find the Domain (Df) and Range (Rf) of the following functions:

1- $y = f(x) = \frac{1}{x}$

Sol: denominator must not equal zero

$$x \neq 0$$

✓ Df =R/{0}

To find Rf : we must convert the function from y=f(x) into x=f(y).

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow \quad x = \frac{1}{y}$$

✓ Rf =R/{0}.

==========

2- $y = \sqrt{3 - X}$

$$3 - X \geq 0 \rightarrow \quad 3 \geq X$$

✓ $Df = \{x \in R \ / \ x \leq 3\}$

To find Rf : we must convert the function from y=f(x) into x=f(y).

$$y = \sqrt{3 - x}$$
$$y^2 = 3 - x$$
$$x = 3 - y^2$$

✓ $Rf = \{y \in R\}$.

==========

H.W: Find the Domain (Df) and Range (Rf) of the following functions:

1- $y = \frac{1}{x^2}$

2- $y = 2x^2$

3- $y = \sqrt{5 - 2X}$

Lecture (2)

Sums, Difference, Product and Quotients of Functions:
جمع، طرح، ضرب وقسمة الدوال

==========

EXERCISES 1.5 صفحة 45 المصدر

Definition: If F and G are functions, then we define the functions

- ✓ Sum → (F+G)(x)= F(x)+G(x)
- ✓ Difference → (F - G)(x)= F(x) - G(x)
- ✓ Product → (F * G)(x)= F(x) *G(x)
- ✓ Quotient → (F / G)(x)= F(x) /G(x) , where $g(x) \neq 0$

Example 1: Combining Functions Algebraically

The function defined by the formulas

f (x) $= \sqrt{x}$ **and** **g(x)** $= \sqrt{1-x}$

Function	Formula
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$
$f \circ g$	$(f \circ g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{x-x^2}$
f/g	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$
g/f	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

H.W: Combining Functions Algebraically The function defined by the formulas **f (x)** $= 3x$ **and** **g(x)** $= 1 - x^2$.

Lecture (3)

==========

Composition of Functions: (تركيب الدوال)

DEFINITION: If f and g are functions, the composite $(f \circ g)$ ((f composed with g)) or $g \circ f$ ((g composed with f)) are defined by:
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ and $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ respectively

Examples 1: Find the formula for $(f \circ g)(x)$ and $(g \circ f)(x)$ if $g(x) = x^2$ and $f(x) = x - 7$,
then find the value of f(g(2)) and g(f(2)).
SOL:
A: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 7$.
$f(g(2)) = 2^2 - 7 = -3$.
B: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 7) = (x - 7)^2$.
$g(f(2)) = (2 - 7)^2 = (-5)^2$.
==========
Examples 2: Find the formula for $(f \circ g)(x)$ and $(g \circ f)(x)$ if $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = \sqrt{x}$,
then find the value of f(g(3)) and g(f(3)).
SOL:
A: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$.
$f(g(3)) = 3 + 1 = 4$.
B: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$.
$g(f(3)) = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$.
==========
H.W: Finding formulas for composites If f (x) = x and g(x) = x +1,
Find:
(a) (f o g)(x) **(b) (g o f)(x)** **(c) (f o f)(x)** **(d) (g o g)(x)**

==========

Lecture (3)

==========

Even Function, Odd Function:(الدالة الفردية والدالة الزوجية)

A function y = f(x) is an

even function of x if $f(-x) = f(x)$

odd function of x if $f(-x) = -f(x)$

for every x in the function's domain.

Examples: Recognizing Even and Odd functions

1) $f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

$-f(x) = -(x)^2$

Even function

2) $f(x) = x^2 + 1$

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$

$-f(x) = -(x)^2 - 1$

Even function

3) $f(x) = x$

$f(-x) = -x$

$-f(x) = -x$

odd function

4) $f(x) = x + 1$

$f(-x) = -x + 1$

$-f(x) = -x - 1$

Not Even function , Not odd function

Lecture (3)

==========

5) $f(x) = x - 1$

$f(-x) = -x - 1$

$-f(x) = -x + 1$

Not Even function , Not odd function

6) $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -(x)^3$

$-f(x) = -(x)^3$

Odd function

==========

H.W:

1) $f(x) = x^3 - 3.$
2) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$
3) $f(x) = x^2 - x$
4) $f(x) = \frac{1}{x}$

==========

Lecture (3)

==========

symmetry of the function (تماثل الدالة)

ما معنى تماثل الدالة؟

- **عندما نرسم منحنى دالة رياضية على مستوى الإحداثيات، يمكن أن يكون لهذا المنحنى تماثل، أي أنه يمكن طي جزء منه على جزء آخر بطريقة معينة، وهذا يساعدنا في فهم سلوك الدالة دون الحاجة إلى رسمها بالكامل**
- **تماثل الدالة يعني أن شكل منحنى الدالة على المستوى الإحداثي يبقى كما هو عند إجراء انعكاس أو تدوير معين. هذا التماثل يساعد في** فهم سلوك الدالة **وتوقع مخرجاتها دون الحاجة إلى رسم كل النقاط**

If f(x,y) = 0 is any function then:

1. Symmetry about x-axis: If f(x,-y) = f(x,y)
2. Symmetry about y-axis: If f(-x,y) = f(x,y) It is called an **even function.**
3. Symmetry about the origin: If f(-x,-y) = f(x,y) It is called an **odd function**

تمثيل بياني	مثال	الوصف	القاعدة الرياضية	نوع التماثل
◆ منحنى متماثل حول المحور Y	$f(x) = x^2$ أو $f(x) = \cos(x)$	$x-$ ، x بـ الدالة تعطي نفس القيم عند استبدال Y. مما يعني أن الرسم متماثل حول محور	$f(-x) = f(x)$	**تماثل حول Y (دالة زوجية)**
◆ منحنى متماثل حول نقطة الأصل	$f(x) = x^3$ أو $f(x) = \sin(x)$	$x-$ ، x بـ عند استبدال تتغير إشارة الدالة، مما يعني أن الرسم يمكن تدويره 180° حول نقطة الأصل ليبقى نفسه.	$f(-x) = -f(x)$	**تماثل حول نقطة الأصل (دالة فردية)**
◆ لا يوجد تماثل واضح	$f(x) = x^2 + x$	لا يوجد تماثل واضح، أي أن الرسم ليس متماثلًا حول محور Y أو نقطة الأصل.	لا تحقق أيًا من القاعدتين السابقتين	**دالة غير متماثلة**

🔷 أنواع التماثل في الدوال 🔷

1️⃣ التماثل حول محور Y (الدالة الزوجية - Even Function)

📌 القاعدة الرياضية:

$$f(x) = f(-x)$$

✏️ ماذا يعني هذا؟

- إذا استبدلنا x بـ $-x$، فإن قيمة الدالة لا تتغير.
- هذا يعني أن المنحنى يمكن طيّه عند **محور** Y وسيكون النصف الأيسر مطابقًا للنصف الأيمن.

✔️ **مثال:** $f(x) = x^2$

- عندما نأخذ $x = 2$ نجد $f(2) = 4$.
- وعندما نأخذ $x = -2$ نجد $f(-2) = 4$ أيضًا.
- بما أن القيمتين متطابقتان، فالدالة **زوجية ومتماثلة حول محور** Y.

2️⃣ التماثل حول نقطة الأصل (الدالة الفردية - Odd Function)

📌 القاعدة الرياضية:

$$f(-x) = -f(x)$$

✏️ ماذا يعني هذا؟

- إذا استبدلنا x بـ $-x$، فإن قيمة الدالة تتغير إشارته (تصبح سالبة).
- هذا يعني أن المنحنى يمكن **تدويره بزاوية 180° حول نقطة الأصل** وسيبدو نفسه تمامًا.

✔️ **مثال:** $f(x) = x^3$

- عندما نأخذ $x = 2$ نجد $f(2) = 8$.
- وعندما نأخذ $x = -2$ نجد $f(-2) = -8$ (عكس الإشارة).
- بما أن القيمتين متعاكستان، فالدالة **فردية ومتماثلة حول نقطة الأصل**.

Examples : Check the symmetry of the following curves:

1) $y = x^2$

**Sol ** $f(x,y) = x^2 - y = 0$

$f(x,-y) = x^2 - (-y) = x^2 + y$ ⇨ $f(x,-y) \neq f(x,y)$ **NOT OK**

$f(-x,y) = (-x)^2 - (y) = x^2 - y$ ⇨ $f(-x,y) = f(x,y)$ **OK**

$f(-x,-y) = (-x)^2 - (-y) = x^2 + y$ ⇨ $f(-x,-y) \neq f(x,y)$ **NOT OK**

So the function has symmetry only about y-axis. It is called an even function.

==========

Lecture (3)

==========

2) $y = x^3$

**Sol ** $f(x,y) = x^3 - y = 0$

$f(x,-y) = x^3 - (-y) = x^3 + y$ ⇨ $f(x,-y) \neq f(x,y)$ **NOT OK**

$f(-x,y) = (-x)^3 - (y) = -x^3 - y$ ⇨ $f(-x,y) \neq f(x,y)$ **NOT OK**

$f(-x,-y) = (-x)^3 - (-y) = -x^3 + y = x^3 - y$ ⇨

$f(-x,-y) = f(x,y)$ **OK**

So the function has symmetry only about origin. It is called an odd function.

==========

3) $x^2 = y^2 + 4$

**Sol ** $f(x,y) = y^2 - x^2 + 4 = 0$

$f(x,-y) = (-y)^2 - x^2 + 4 = y^2 - x^2 + 4$ ⇨ $f(x,-y) = f(x,y)$ **OK**

$f(-x,y) = y^2 - (-x)^2 + 4 = y^2 - x^2 + 4$ ⇨ $f(-x,y) = f(x,y)$ **OK**

$f(-x,-y) = (-y)^2 - (-x)^2 + 4 = y^2 - x^2 + 4$ ⇨ $f(-x,y) = f(x,y)$ **OK**

So the function has symmetry about x-axis, y-axis and the origin.

==========

H.W:

1) $y = 3x^2 + 2.$
2) $x^2 + y^2 = 1$

Lecture (4)

==========

Graph of Functions (Graph of Curves) رسم الدوال

To graph the curve of a function, we can follow the following steps:

1. Find the domain and range of the function.
2. Check the symmetry of the function
3. Find (if any found) points of intersection with *x*-axis and *y*-axis.
4. Choose some another points on the curve.
5. Draw s smooth line through the above points.

Example 3: Sketch the graph of the curve $y = f(x) = x^2 - 1$

Sol.:

Step 1: Find Df, Rf of the function?

Df = (-∞,∞);

To find Rf : we must convert the function from y= f(x) into x=f(y).

$$y = x^2 - 1$$

$$y = x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = y + 1$$

$$x = \pm\sqrt{y+1}$$

So y +1 ≥ 0 ⇒ y ≥ -1 ⇒ Rf = (-1,∞)

Step 2: Find x and y intercept:إيجاد نقطة التقاطع بين المحورين x و y:

To find x-intercept put y=0 $\rightarrow$ $x^2 - 1 = 0 \rightarrow X = \pm 1$

So x-intercept are (-1,0) and (+1,0).

To find y-intercept put x=0 → y = 0-1 → y = -1

So y-intercept is (0,-1).

Step 3: check the symmetry:

$$x^2 - y - 1 = 0$$

$$f(x, -y) = x^2 + y - 1 \neq f(x, y)$$

Lecture (4)

==========

$f(-x, y) = x^2 - y - 1 = f(x, y)$ **so that the function is symmetry about y.**

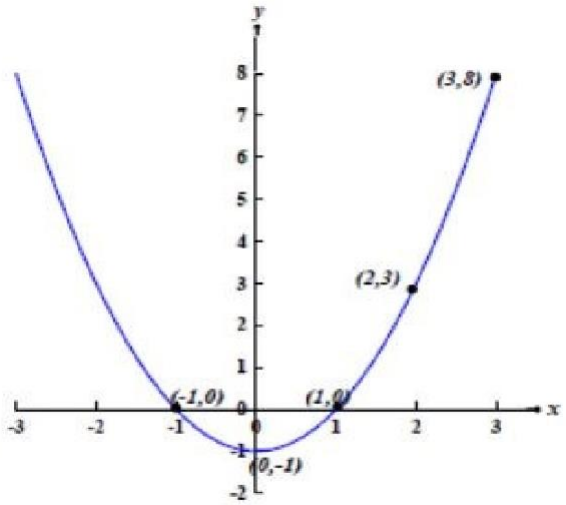
$f(-x, -y) = x^2 + y - 1 \neq f(x, y)$

Step 4: Choose some another point on the curve.

x	y
2	3
3	8

(2,3) ,(3,8)

Step 5: Draw smooth line through the above points



H.W ارسم Draw

1- $y = 3x^2 - 2$

2- $y^2 = 4x - 1$

==========

Lecture (4)

==========

DERIVATIVES المشتقة

مشتق الدالة $f(x)$ هو معدل التغير اللحظي للدالة بالنسبة لمتغيرها x، وهو يعبر عن ميل المماس لمنحنى الدالة عند أي نقطة.

يُعرف مشتق الدالة $f(x)$ عند النقطة x بالصورة التالية:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

وهذا الحد، إذا وُجد، يعبر عن معدل التغير اللحظي أو ميل المماس عند النقطة x.

تفسير المشتقة:

- **هندسيًا:** تمثل المشتقة ميل المماس لمنحنى الدالة عند نقطة معينة.
- **فيزيائيًا:** إذا كانت $f(x)$ تمثل موقع جسم متحرك، فإن المشتقة $f'(x)$ تعبر عن سرعته اللحظية.
- **رياضيًا:** المشتقة تعطي طريقة لتحليل سلوك الدالة، مثل تحديد القيم القصوى والنقاط الحرجة.

الاسم بالعربية	الاسم بالإنجليزية	التعريف	الاستخدامات
المشتقة الأولى	**First Derivative**	معدل التغير اللحظي للدالة $f(x)$	إيجاد الميل، تحديد التزايد والتناقص
المشتقة الثانية	**Second Derivative**	مشتقة المشتقة الأولى $f''(x)$	دراسة التقعر، اختبار القيم القصوى
المشتقات العليا	**Higher-Order Derivatives**	مشتقات أعلى مثل $f''''(x)$ و $f'''(x)$	الفيزياء، تحليل البيانات، الحركات المعقدة
المشتقات الجزئية	**Partial Derivatives**	اشتقاق دالة متعددة المتغيرات بالنسبة لأحد المتغيرات فقط	الهندسة، الاقتصاد، الذكاء الاصطناعي
المشتقات الاتجاهية	**Directional Derivatives**	معدل تغير الدالة في اتجاه معين	معالجة الصور، الفيزياء، تحليل الانحدار
المشتقة اللوغاريتمية	**Logarithmic Differentiation**	استخدام اللوغاريتمات لتبسيط الاشتقاق	اشتقاق الدوال المركبة والمعقدة
المشتقة الضمنية	**Implicit Differentiation**	اشتقاق العلاقات التي تحتوي على x و y معًا	الدوال الضمنية، الدوائر، الهندسة التحليلية
المشتقة الزمنية	**Time Derivative**	اشتقاق الدالة بالنسبة للزمن t	الفيزياء، الميكانيكا، الديناميكا
مشتقة ليبنيز	**Leibniz's Notation**	تدوين الاشتقاق باستخدام $\frac{d}{dx}f(x)$	الصياغة العامة في الرياضيات والفيزياء

الاسم بالعربية	الاسم بالإنجليزية	التعريف	الاستخدامات
مشتقات الدوال المثلثية	**Trigonometric Derivatives**	مشتقات الدوال مثل $\sin x, \cos x, \tan x$	الفيزياء، الهندسة، التذبذبات، الأمواج
مشتقات الدوال الأسية	**Exponential Derivatives**	مشتقة الدوال الأسية مثل a^x و e^x	النمو السكاني، الفيزياء، الاقتصاد
مشتقات الدوال اللوغاريتمية	**Logarithmic Derivatives**	مشتقة $\ln x$ و $\log_a x$	تحليل البيانات، الإحصاء، الديناميكا
مشتقات الدوال الجذرية	**Radical Function Derivatives**	اشتقاق الجذور مثل $\sqrt{x}$	الهندسة، التطبيقات الفيزيائية
مشتقات الدوال العكسية	**Inverse Function Derivatives**	مشتقات الدوال العكسية مثل $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$	الفيزياء، علم الفلك، الهندسة

the definition of derivative of the function f(x) and this denoted by y'or $\frac{dy}{dx}$or $\frac{d}{dx}f(x)$ or $D_x f(x)$ or $f'(x)$ and given by the formula

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Example1: Find the derivative of the function $f(x) = x^2$ using the definition of derivative.

Sol: $f(x) = x^2$

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x$$

Example2: Find the derivative of the function $f(x) = 3x$ using the definition of derivative.

Sol: $f(x) = 3x$

$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x) - 3x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x - 3x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3$$

==========

Laws of Derivatives:

1- $\frac{d}{dx}c = 0$ where c is constant.

- $\frac{d}{dx}4 = 0$
- $\frac{d}{dx}\sqrt{2} = 0$

2- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

- $\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$
- $\frac{d}{dx}x^{-3} = -3x^{-4}$
- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

3- If U and V are two functions of x then:

a) $\frac{d}{dx}(c * U) = c\frac{d}{dx}(U)$

- $\frac{d}{dx}3x^3 = 3\frac{d}{dx}x^3 = 3(3x^2) = 9x^2$

b) $\frac{d}{dx}(U \pm V) = \frac{d}{dx}(U) \pm \frac{d}{dx}(V)$

- $\frac{d}{dx}(x^2 + x^3) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 2x + 3x^2$

c) $\frac{d}{dx}(U * V) = U\frac{d}{dx}(V) + V\frac{d}{dx}(U)$

- $\frac{d}{dx}(x^2 * x^3) = x^2\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\frac{d}{dx}(x^2) = x^2 * (3x^2) + x^3 * (2x)$

d) $\frac{d}{dx}U^n = nU^{n-1} * \frac{d}{dx}U$

- $\frac{d}{dx}(x^5)^3 = 3(x^5)^2 * \frac{d}{dx}x^5 = 3(x^5)^2 * 5x^4$

e) $\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{V^2}$

- $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \frac{x^3 * (2x) - x^2 * 3x^2}{(x^3)^2}$

Lecture (5)

==========

Example: If $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 4$ **find** $f'(2)$.

Sol: $f'(x) = 3x^2 + 8x - 5$

$$f'(2) = 3 * (2)^2 + 8 * (2) - 5$$

$$f'(2) = 23$$

==========

Example: If $y_1 = 3x^2 + 2x + 1$, $y_2 = 5x + 8$ **find** $f'(y_1 + y_2)_{(2)}$

Sol: $f'(y_1 + y_2) = f'(y_1) + f'(y_2)$

$$= f'(3x^2 + 2x + 1\ ) + f'(5x + 8\ )$$

$$= (6x + 2\ ) + (5\ )$$

$$= 6x + 7$$

$$f'(y_1 + y_2)_{(2)} = 6 * (2) + 7$$

$f'(y_1 + y_2)_{(2)} = 19$.

==========

H.W:

1- If $y = 3x^4 + 4x^3 - 2x + 6$ **find** $f'(3)$.

2- If $y_1 = 5x^4 + 2x^3 - 1$, $y_2 = 5x^3 - x + 2$ **find** $f'(y_1 + y_2)_{(3)}$

3- If $y = \frac{2x^2 - 6x}{4x}$ **find** $f'(1)$.

==========

المادة: الرياضيات

المرحلة: الاولى

2023-2022

Lecture (5)

==========

(Second and Higher Order Derivative) المشتقة الثانية

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}y)$$

Example: If $y = x^4 + 2x^3 - 3x + 1$ **find** $f''(1)$.

Sol: $f'(x) = 4x^3 + 2 * 3x^2 - 3 = 4x^3 + 6x^2 - 3$

$$f''(x) = 4 * 3x^2 + 6 * 2x = 12x^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12(1)^2 + 12 = 24.$$

==========

Example: If $y = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6$ **find** $f''(-1)$.

Sol: $f'(x) = 8x^3 + 15x^2 - 6x$

$$f''(x) = 24x^2 + 30x - 6$$

$$f''(x) = 24(-1)^2 + 30(-1) - 6$$

$$= 24 - 30 - 6 = -12$$

==========

H.W:

1- If $y = 3x^4 + 4x^3 - 2x + 6$ **find** $f''(4)$.

2- If $y_1 = 5x^4 + 2x^3 - 1$, $y_2 = 5x^3 - x + 2$ **find** $f''(y_1 - y_2)_{(1)}$

3- If $y = 5x^3 + 4x - 7$ **find** $f''(2)$.

==========

المادة: الرياضيات

المرحلة: الاولى

2023-2022

Lecture (5)

==========

(Implicit Differentiation) المشتقة الضمنية

In some cases, it is difficult to solve **y=f(x),** so to find $\frac{d}{dx}$ for such cases, implicit differentiation will be use.

Example: Find $\frac{d}{dx}$ of the following

1- $y^2 + x^2 = 1$

Sol: $2y\frac{d}{dx} + 2x = 0$

$$2y\frac{d}{dx} = -2x$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

2- Find the Implicit Differentiation of the function

$2y = x^2 + 3xy^2$ **at** **x=1, y=2**

Sol: $2\frac{d}{dx} = 2x + (3x * 2y * \frac{d}{dx}) + (y^2 * 3)$

$$2\frac{d}{dx} = 2x + (6xy\frac{d}{dx}) + (3y^2)$$

$$2\frac{d}{dx} - 6xy\frac{d}{dx} = 2x + (3y^2)$$

$$(2 - 6xy)\frac{d}{dx} = 2x + (3y^2)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{2x + 3y^2}{2 - 6xy} = \frac{2 * (1) + 3 * (2)^2}{2 - (6 * (1) * (2))} = \frac{14}{-10}$$

جدول جميع الدوال المثلثية والعكسية والزائدية

الرقم	اسم الدالة بالعربية	الرمز الرياضي	الاسم بالإنجليزية
◆ الدوال المثلثية (Trigonometric Functions)			
1	جيب	$\sin x$	Sine
2	جيب تمام	$\cos x$	Cosine
3	ظل	$\tan x$	Tangent
4	ظل تمام	$\cot x$	Cotangent
5	قاطع	$\sec x$	Secant
6	قاطع تمام	$\csc x$	Cosecant
◆ الدوال المثلثية العكسية (Inverse Trigonometric Functions)			
7	القوس الجيبي	$\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$	Inverse Sine (Arcsine)
8	القوس الجيبي تمام	$\cos^{-1} x$ أو $\arccos x$	Inverse Cosine (Arccosine)
9	القوس الظلي	$\tan^{-1} x$ أو $\arctan x$	Inverse Tangent (Arctangent)
10	القوس الظلي تمام	$\cot^{-1} x$ أو $\operatorname{arccot} x$	Inverse Cotangent (Arccotangent)
11	القوس القاطع	$\sec^{-1} x$ أو $\operatorname{arcsec} x$	Inverse Secant (Arcsecant)
12	القوس القاطع تمام	$\csc^{-1} x$ أو $\operatorname{arccsc} x$	Inverse Cosecant (Arccosecant)
◆ الدوال الزائدية (Hyperbolic Functions)			
13	جيب زائدية	$\sinh x$	Hyperbolic Sine
14	جيب تمام زائدية	$\cosh x$	Hyperbolic Cosine
15	ظل زائدية	$\tanh x$	Hyperbolic Tangent
16	ظل تمام زائدية	$\coth x$	Hyperbolic Cotangent
17	قاطع زائدية	$\operatorname{sech} x$	Hyperbolic Secant
18	قاطع تمام زائدية	$\operatorname{csch} x$	Hyperbolic Cosecant
◆ الدوال الزائدية العكسية (Inverse Hyperbolic Functions)			
19	القوس الجيبي الزائدي	$\sinh^{-1} x$ أو $\operatorname{arsinh} x$	Inverse Hyperbolic Sine (Area Sine)
20	القوس الجيبي تمام الزائدي	$\cosh^{-1} x$ أو $\operatorname{arcosh} x$	Inverse Hyperbolic Cosine (Area Cosine)
21	القوس الظلي الزائدي	$\tanh^{-1} x$ أو $\operatorname{artanh} x$	Inverse Hyperbolic Tangent (Area Tangent)
22	القوس الظلي تمام الزائدي	$\coth^{-1} x$ أو $\operatorname{arcoth} x$	Inverse Hyperbolic Cotangent (Area Cotangent)
23	القوس القاطع الزائدي	$\operatorname{sech}^{-1} x$ أو $\operatorname{arsech} x$	Inverse Hyperbolic Secant (Area Secant)
24	القوس القاطع تمام الزائدي	$\operatorname{csch}^{-1} x$ أو $\operatorname{arcsch} x$	Inverse Hyperbolic Cosecant (Area Cosecant)

DIFFERENTIATION RULES

General Formulas

Assume u and v are differentiable functions of x.

Constant: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Sum: $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Difference: $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

Constant Multiple: $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

Product: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Quotient: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Power: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Chain Rule: $\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Trigonometric Functions

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Exponential and Logarithmic Functions

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Inverse Trigonometric Functions

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Hyperbolic Functions

$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Inverse Hyperbolic Functions

$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$

Parametric Equations

If $x = f(t)$ and $y = g(t)$ are differentiable, then

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{and} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

Chapter 3 Practice Exercises

Derivatives of Functions

Find the derivatives of the functions in Exercises 1-40.

1. $y = x^5 - 0.125x^2 + 0.25x$
2. $y = 3 - 0.7x^3 + 0.3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \dfrac{\csc\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$
15. $s = (\sec t + \tan t)^5$
16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta \sin\theta}$
18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$
19. $r = \sin\sqrt{2\theta}$
20. $r = \sin\left(\theta + \sqrt{\theta + 1}\right)$
21. $y = \dfrac{1}{2}x^2 \csc\dfrac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x}\csc(x + 1)^3$
25. $y = 5\cot x^2$
26. $y = x^2\cot 5x$
27. $y = x^2\sin^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2}\sin^2(x^3)$
29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$
30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$
31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$
32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$
33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$
34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$

Implicit Differentiation

In Exercises 41–48, find dy/dx.

41. $xy + 2x + 3y = 1$
42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$
43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$
44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$
45. $\sqrt{xy} = 1$
46. $x^2y^2 = 1$
47. $y^2 = \dfrac{x}{x + 1}$
48. $y^2 = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

الازاحة والسرعة والتعجيل

$$s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t)$$

الكمية (Quantity)	الرمز (Symbol)	التعريف (Definition)	العلاقة بالمشتقة (Derivative Relation)	ناتج المشتقة (Derivative Output)
الإزاحة (Displacement)	$s(t)$	التغير في موضع الجسم مع الزمن (Change in position over time)	—	**مشتقتها تعطي** ← **السرعة** $v(t)$
السرعة (Velocity)	$v(t)$	المعدل الزمني للتغير في الإزاحة (Rate of change of displacement)	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	**مشتقتها تعطي** ← **التعجيل** $a(t)$
التعجيل (Acceleration)	$a(t)$	المعدل الزمني للتغير في السرعة (Rate of change of velocity)	$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	**المشتقة التالية)التغير في التعجيل (تعطي** ← الجركة المتغيرة (Jerk) $j(t)$

رسم بياني لعلاقة المشتقات:

$$s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} j(t)$$

- **الإزاحة** تشتق فتعطي **السرعة**
- **السرعة** تشتق فتعطي **التعجيل**

(LIMITS) الغاية

Properties of limits

1- If f(x)=k then $\lim_{x\to a} f(x) = k$

2- If $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$ $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$

a) Sum rule: $\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = L_1 + L_2$

b) Difference rule: $\lim_{x\to a}[f_1(x) - f_2(x)] = L_1 - L_2$

c) Product rule : $\lim_{x\to a}[f_1(x) * f_2(x)] = L_1 * L_2$

d) Quotient rule: $\lim_{x\to a}[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}] = \frac{L_1}{L_2}$

3- Polynomial $\lim_{x\to a}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) = c_0 + c_1a + c_2a^2 + \cdots + c_na^n$

==========

Example: Find the limits of the following:

1- $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x) = 2^2 - 4 * 2 = -4$

2- $\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2) = 1^3 - 2 * 1^2 = -1$

3- $\lim_{x\to 1}[\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}] = \frac{(3*1-1)^2}{(1+1)^3} = \frac{(2)^2}{(2)^3} = \frac{4}{8}$

4- $\lim_{x\to 2}[\frac{(x^2-4)}{x-2}] = \frac{0}{0}$ (Indeterminate quantities كمية غير محددة)

So $\lim_{x\to 2}[\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}] = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$

5- $\lim_{x\to 2}[\frac{(x^2-4)}{x^2-5x+6}] = \frac{0}{0}$ (Indeterminate quantities كمية غير محددة)

So $\lim_{x\to 2}[\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}] = \lim_{x\to 2}[\frac{(x+2)}{(x-3)}] = \frac{4}{-1} = -4.$

==========

(Continuous Functions) : الدوال المستمرة

The Continuity Test:

The function **y= f (x)** is continuous at **x=c** if and only if the following statements are true:

1- **f (c) exists**
2- $\lim_{x\to c} f(x)$ **exists**
3- $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$

Example: did the function $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$ is continuous at the x=2 ?

Sol:

$$f(2) = 8 - 2^3 - 2 * (2)^2 = 8$$

$$\lim_{x\to 2}[\, 8 - x^3 - 2x^2 \,] = 8 - 2^3 - 2 * (2)^2 = 8$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x).$$

So the function is continuous at x=2.

Example: did the function $f(x) = \frac{(x^2-4)}{x-2}$ is continuous at the x=2 ?

Sol:

$$f(2) = \frac{(2^2-4)}{2-2} = \frac{0}{0}$$ not exists

So the function is not continuous at x=2.